Problemes

La secció de problemes del *SCM/Notícies* torna, i aquesta vegada amb molt de material! Dels problemes proposats a números anteriors n'hem rebut força solucions, cosa que posa de manifest la diversitat d'enfocaments amb què pot ser atacat un mateix problema. Lamentablement, l'espai és curt i només en podem publicar una de cadascun dels problemes resolts.

Naturalment, tot i això, hem de fer públic i amb veu ben alta el nostre agraïment a tots els qui col·laboren, sigui per les treballadíssimes solucions que ens han enviat, sigui per les seves aportacions en forma de nous enunciats. Cal fer notar que, a més, un petit grup d'estudiants de matemàtiques comença a treure el cap amb molta força en aquesta secció.

Mencionem el professor Joaquim Nadal Vidal, que ens soluciona el difícil problema **A65**, ens aporta una altra solució de l'**A68**, molt més senzilla que les publicades fins ara, i resol finalment el problema **A72**, a més de fer-ho per als **A73** i **A74**.

Un tàndem brillant, els estudiants Xavi Ros i Hugo Fernández, van més enllà d'allò que demana el problema **A73** i demostren la validesa de l'enunciat en condicions molt menys restrictives que la que s'hi imposava! El primer d'ells, a més, ens forneix d'una elegant solució del problema **A74** amb l'ús dels nombres complexos, i ens proposa l'enunciat **A80**. D'aquest mateix problema **A73**, el professor Miquel Amengual ens fa notar que va ser proposat per Hongria a la Sisena Olimpíada Matemàtica Internacional (Moscou, 1964) i en dóna la referència: Samuel L. Greitzer, International Mathematical Olympiads 1959–1977, The Mathematical Association of America (1978).

Agraïm també al professor Miquel Amengual la seva solució del problema **A74** i l'enunciat del problema **A78**, a Jordi Delgado la solució del divertit cas dels cent condemnats (**A75**) i a l'estudiant (i també olímpic com els altres dos) Gerard Planes la proposta de l'**A77**. A tothom: moltíssimes gràcies!

Com sempre, us recordem que, si treballeu amb TEX o LaTEX, fareu que la nostra atenció es pugui concentrar en els aspectes més agradables de la feina de compondre aquesta secció, i que les adreces de correu per enviar-nos el vostre treball són cromero@xtec.cat o bé carles.romero.c@gmail.com. Fins a la propera!

Problemes proposats

A77. (Proposat per Gerard Planes Conangla, estudiant, FME (UPC).) Un nombre finit m de pagesos participa en un concurs per tal de saber quin d'ells és més bon negociant. Inicialment, tots ells tenen la mateixa quantitat de diners, i comencen invertint-los en un nombre finit n de parcel·les de conreu, tot seguint sempre aquest mateix patró:

Cada comprador indica els diners que vol invertir en cadascuna de les n parcel·les (no hi ha cap preu prefixat) i, de cada parcel·la, se n'endú la fracció

$$F_i = \frac{d_i}{x_i}\,,$$

on $d_i \in \mathbb{R}$ representa els diners que ha decidit invertir en la parcel·la i-èsima i x_i és la suma de tots els diners que tots els m concursants han acabat pagant per aquesta parcel·la en particular. A més, cap dels pagesos sap com han repartit els seus diners els altres pagesos. Un cop fet això, es procedeix a calcular els beneficis:

A cada pagès, cada parcel·la li produirà el benefici:

$$B_i = A_i \cdot F_i,$$

on $A_i > 0$ és una constant pròpia de cada parcel·la que indica la qualitat de la terra, i F_i és la fracció posseïda de la parcel·la. El benefici total que obtindrà cada pagès serà la suma dels beneficis B_i obtinguts a cada parcel·la.

Finalment, es fa el recompte de beneficis de cada pagès i el que té uns beneficis estrictament inferiors a la resta és eliminat (en cas d'empat entre els últims classificats, tots ells serien eliminats). Aleshores, es repeteix el procés —es tornen a subhastar terres i a calcular beneficis— però només entre els pagesos que no han estat eliminats. El concurs acaba quan només queda un concursant, o quan l'últim queda empatat amb el primer.

Es demana trobar com ha de distribuir un pagès els diners entre les parcel·les per arribar amb tota seguretat a la fase final i demostrar que aquesta estratègia de distribució és única.

A78. (Proposat per Miquel Amengual Covas, Cala Figuera, Mallorca.)

Sigui $\triangle ABC$ un triangle, sigui D el segon punt d'intersecció de la bisectriu de l'angle $\widehat{BAC}$ amb el circumcercle del triangle $\triangle ABC$ i siguin B' y C' els respectius peus de les perpendiculars a la bisectriu AD tirades des dels vèrtexs B i C. Demostreu que

$$BB' + CC' \leq AD\,.$$

En quines condicions hi ha igualtat?

A79. (D'una olimpíada universitària iberoamericana.) Els divisors positius d'un nombre enter positiu n estan escrits en ordre creixent a partir del nombre 1, i fins a n:

$$1 = d_1 < d_2 < d_3 < \cdots < n\,.$$

S'ha de trobar la n que compleix:

$$\begin{aligned} &i) \quad n = d_{13} + d_{14} + d_{15} \\ &ii) \quad (d_5+1)^3 = d_{15} + 1\,. \end{aligned}$$

A80. (Proposat per Xavi Ros Otón, estudiant, FME (UPC).) Sigui $\triangle ABC$ un triangle amb medianes m_a, m_b i m_c. Sigui $\triangle PQR$ el triangle que té per costats m_a, m_b i m_c i siguin d_a, d_b i d_c les distàncies del baricentre d'aquest triangle als seus vèrtexs. Demostreu que:

$$\begin{aligned} &a) \quad d_a + d_b + d_c = p \\ &b) \quad [PQR] = \frac{3}{4}[ABC] \end{aligned}$$

on p i $[ABC]$ denoten, respectivament, el semiperímetre i l'àrea del $\triangle ABC$.

Solucions

A65. (Proposat per la redacció.) Demostreu que, per a tot nombre enter i positiu n, hi ha una potència de 2, expressada en base 10, les n últimes xifres de la qual són tots uns o dosos. Per exemple, per a $n = 1$, $2^5 = 32$ i, per a $n = 2$, $2^9 = 512$.

Solució: (Solució de Joaquim Nadal Vidal, IES de Cassà de la Selva.) Necessitem dos resultats previs:

Proposició 1. Si $2^j - 1 = 5^k m_k$ amb $m_k \neq \dot{5}$, aleshores hi ha $m_{k+1} \neq \dot{5}$ que fa $2^{5j} - 1 = 5^{k+1} m_{k+1}$.

$$\begin{aligned} 2^{5j} = {2^j}^5 = \left(1 + 5^k m_k\right)^5 &= \\ = 1 + 5 \cdot 5^k m_k + 10 \cdot 5^{2k} m_k^2 & \\ \quad + 10 \cdot 5^{3k} m_k^3 + 5 \cdot 5^{4k} m_k^4 + 5^{5k} m_k^5 &= \\ = 1 + 5^{k+1} \Big(m_k + 2 \cdot 5^k m_k^2 & \\ \quad + 2 \cdot 5^{2k} m_k^3 + 5^{3k} m_k^4 + 5^{4k-1} m_k^5\Big) &= \\ = 1 + 5^{k+1} m_{k+1} & \end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned} m_{k+1} = &m_k + 2 \cdot 5^k m_k^2 + 2 \cdot 5^{2k} m_k^3 \\ &+ 5^{3k} m_k^4 + 5^{4k-1} m_k^5 \neq \dot{5} \end{aligned}$$

perquè, per hipòtesi, $m_k \neq \dot{5}$. Així, doncs, $2^{5j} - 1 = 5^{k+1} m_{k+1}$ i $m_{k+1} \neq \dot{5}$.

Proposició 2. Si $e_k > 0$ és l'exponent més petit que fa $2^{e_k} - 1 = 5^k m_k$ amb $m_k \neq \dot{5}$ i $0 < t < 5e_k$ fa $2^t - 1 = 5^{k+1} n_{k+1}$, amb $n_{k+1} \neq \dot{5}$, aleshores $t = \dot{e}_k$ i $t > e_k$.

Demostració: la primera premissa garanteix que $t \neq e_k$. Suposem $t < e_k$. Aleshores fem la resta

$$\begin{aligned} 5^k m_k - 5^{k+1} n_{k+1} &= 2^{e_k} - 1 - \left(2^t - 1\right) \\ &= 2^{e_k} - 2^t = 2^t \left(2^{e_k - t} - 1\right) \end{aligned}$$

que dóna

$$2^{e_k - t} - 1 = \frac{5^k m_k - 5^{k+1} n_{k+1}}{2^t} = 5^k \frac{m_k - 5 n_{k+1}}{2^t}\,.$$

Però com que $m_k \neq \dot{5}$, el numerador de la fracció i, per tant, tota ella, no conté el factor 5, en contradicció amb la hipòtesi que e_k és l'exponent més petit que compleix la condició. Així, doncs, $t > e_k$.

Podem, per tant, fer la divisió entera de t entre e_k per obtenir p i r amb $t = e_k p + r$, $1 \leq p < 5$ i $0 \leq r < e_k$. Ara tindrem

$$\begin{aligned} 5^{k+1} n_{k+1} &= 2^t - 1 = 2^{e_k p + r} - 1 \\ &= \left(2^{e_k}\right)^p \cdot 2^r - 1 = \left(1 + 5^k m_k\right)^p \cdot 2^r - 1\,. \end{aligned}$$

Però

$$\left(1+5^k m_k\right)^p =$$
$$= 1 + p5^k m_k + \binom{p}{2} 5^{2k} m_k^2 + \cdots + 5^{pk} m_k^p$$
$$= 1 + 5^k \left(pm_k + \binom{p}{2} 5^k m_k^2 + \cdots + 5^{(p-1)k} m_k^p\right)$$

i, si posem

$$q_k = pm_k + \binom{p}{2} 5^k m_k^2 + \ldots + 5^{(p-1)k} m_k^p$$

és clar que $q_k \neq \dot{5}$ perquè ni p ni m_k ho són. Resulta

$$5^{k+1} n_{k+1} = \left(1+5^k q_k\right) \cdot 2^r - 1 = 2^r + 2^r 5^k q_k - 1$$

o sigui,

$$\begin{aligned} 2^r - 1 &= 5^{k+1} n_{k+1} - 2^r 5^k q_k \\ &= 5^k \left(5n_{k+1} - 2^r q_k\right) = 5^k l_k \end{aligned}$$

amb $l_k \neq \dot{5}$, perquè $q_k \neq \dot{5}$. Ara, com que e_k és l'exponent positiu mínim i $0 \leq r < e_k$, no queda altra opció que $r = 0$ i, per tant, $t = e_k p = \dot{e}_k$ i $p = 2$, 3 o 4, que és el que volíem demostrar.

Fixem-nos ara en $2^4 - 1 = 15 = 5 \cdot 3$. La proposició 1 ens assegura que

$$\begin{array}{ccc} 2^{20} - 1 = \dot{5}^2 & \text{i} & 2^{20} - 1 \neq \dot{5}^3 \\ 2^{100} - 1 = \dot{5}^3 & \text{i} & 2^{100} - 1 \neq \dot{5}^4 \\ 2^{500} - 1 = \dot{5}^4 & \text{i} & 2^{500} - 1 \neq \dot{5}^5 \\ \ldots\ldots\ldots & \text{i} & \ldots\ldots\ldots \end{array}$$

i, en general, que, per a tot k,

$$2^{4\cdot 5^{k-1}} - 1 = \dot{5}^k, \quad \text{i} \quad 2^{4\cdot 5^{k-1}} - 1 \neq \dot{5}^{k+1} \qquad (*)$$

A més, $4 \cdot 5^{k-1}$ és l'exponent més petit que ho compleix, fet que demostrem ara per inducció sobre k:

Per a $k = 1$, el fet es redueix a les afirmacions $2^4 - 1 = \dot{5}$ i $2^4 - 1 \neq \dot{5}^2$, que són certes. Si suposem que el fet es compleix per a k, això vol dir que $e_k = 4 \cdot 5^{k-1}$ és el menor exponent que compleix $(*)$ i hem de veure que $e_{k+1} = 4 \cdot 5^k = 5e_k$ és l'exponent més petit que compleix

$$2^{e_{k+1}} - 1 = \dot{5}^{k+1}, \quad \text{i} \qquad 2^{e_{k+1}} - 1 \neq \dot{5}^{k+2}$$

Si hi ha $t < e_{k+1} = 5e_k$ que compleix

$$2^t - 1 = \dot{5}^{k+1} \quad \text{i} \qquad 2^t - 1 \neq \dot{5}^{k+2}$$

podem aplicar la proposició 2 i hi ha tres possibilitats:

i) Que $t = 2e_k$. Aleshores, $2^t - 1 = 2^{2e_k} - 1 = \dot{5}^{k+1}$. Ara posem $2^{2e_k} = 1 + \dot{5}^{k+1}$ i, en elevar al quadrat, obtenim

$$\left(2^{2e_k}\right)^2 = 2^{4e_k} = 1 + \dot{5}^{k+1}.$$

Ara fem

$$2^{e_{k+1}} - 2^{4e_k} = 2^{5e_k} - 2^{4e_k} = 2^{4e_k}\left(2^{e_k} - 1\right) = \dot{5}^{k+1}$$

que implica

$$2^{e_k} - 1 = \dot{5}^{k+1} \qquad (**)$$

que és contradictori amb $(*)$.

ii) Que $t = 3e_k$. Pel mateix procediment d'elevar al quadrat obtenim

$$2^{6e_k} = 1 + \dot{5}^{k+1}$$

i, aleshores,

$$2^{6e_k} - 2^{e_{k+1}} = 2^{6e_k} - 2^{5e_k} = 2^{5e_k}\left(2^{e_k} - 1\right) = \dot{5}^{k+1}$$

que torna a portar a la contradicció $(**)$.

iii) Que $t = 4e_k$. Només cal fer

$$2^{e_{k+1}} - 2^{4e_k} = 2^{5e_k} - 2^{4e_k} = 2^{4e_k}\left(2^{e_k} - 1\right) = \dot{5}^{k+1}$$

que és la mateixa contradicció $(**)$.

En conseqüència, t no pot ser més petit que e_{k+1} i la hipòtesi d'inducció també és certa per a $k + 1$.

Observem ara que, si $R > q + 1$,

$$\begin{aligned} 2^{R+4\cdot 5^q} - 2^R &= 2^R\left(2^{4\cdot 5^q} - 1\right) \\ &= \dot{2} \cdot \dot{2}^{q+1} \cdot \dot{5}^{q+1} = \dot{2} \cdot \dot{10}^{q+1} \end{aligned}$$

i

$$2^{R+4\cdot 5^q} - 2^R \neq \dot{10}^{q+2}$$

cosa que significa que $2^{R+4\cdot 5^q}$ i 2^R, comptant des de les unitats, tenen iguals les primeres $q+1$ xifres, mentre que les respectives $(q+2)$-èsimes xifres són diferents però de la mateixa paritat. A més, el nombre format per aquestes $q + 1$ xifres és múltiple de 2^{q+1}. En efecte, si C és aquest nombre,

$$2^R = 10^{q+1} A + C$$

i

$$\begin{aligned} C &= 2^R - 10^{q+1} A \\ &= 2^{q+1}\left(2^{R-q-1} - 5^{q+1} A\right) = \dot{2}^{q+1}. \end{aligned}$$

Això és la clau que permet, no només demostrar l'existència que es demana a l'enunciat del problema, sinó construir efectivament exemples dels nombres que s'hi demanen.

Comencem amb $2^9 = 512$, que acaba en 12. Aleshores, amb $q = 1$, els nombres

$$2^9\,, \quad 2^{9+4\cdot 5} = 2^{29}\,, \quad 2^{29+4\cdot 5} = 2^{49}\,,$$
$$2^{49+4\cdot 5} = 2^{69}\,, \quad 2^{69+4\cdot 5} = 2^{89}$$

acaben en 12 i les respectives xifres de les centenes són senars, com ho és la de $2^9 = 512$, i totes diferents. En conseqüència, per a alguna d'aquestes potències, la xifra de les centenes és 1 i, per tant, hi ha una potència de 2 que acaba en 112.

No costa gaire veure que 2^{89} és, precisament, la potència de 2 que acaba en 112, encara que això és irrellevant per a la demostració. Com que

$$\begin{aligned} 2^m &= 1000A + 112 = 2^3 \cdot 5^3 \cdot A + 7 \cdot 2^4 \\ &= 2^3\left(5^3 \cdot A - 7 \cdot 2\right) \end{aligned}$$

resulta

$$2^{m-3} = 5^3 \cdot A - 7 \cdot 2$$

i el nombre A ha de ser parell, cosa que implica que la xifra dels milers de qualsevol potència de 2 acabada en 112 ha de ser parella. Novament, els nombres

$$2^{89}\,, \quad 2^{89+4\cdot 5^2} = 2^{189}\,,$$
$$2^{189+4\cdot 5^2} = 2^{289}\,, \quad 2^{289+4\cdot 5^2} = 2^{389}\,,$$
$$2^{389+4\cdot 5^2} = 2^{489}$$

acaben en 112 i les respectives xifres dels milers són parelles i totes diferents. Per tant, per a alguna d'aquestes potències, la xifra dels milers és 2 i, en conseqüència, hi ha una potència de 2 que acaba en 2112 (que es pot veure que és 2^{89}).

Aquest procés constructiu es pot allargar indefinidament, tot demostrant la veritat de l'afirmació de l'enunciat del problema.

En general, si 2^R té les n darreres xifres que són uns o dosos, tenim

$$2^R = 10^n A + C$$

on C és el nombre format per les n darreres xifres, uns o dosos, i que és múltiple de 2^n. Si posem $C = 2^n \cdot B$, resulta

$$\begin{aligned} 2^R &= 10^n A + C = 10^n A + 2^n B \\ &= 2^n\left(5^n A + B\right) \end{aligned}$$

que dóna

$$2^{R-n} = 5^n A + B$$

cosa que mostra que A i B són de la mateixa paritat i la $(n+1)$-èsima xifra per la dreta serà parella o senar segons ho sigui B.

En conseqüència, a partir d'una potència R-èsima de 2 que tingui les n últimes xifres uns o dosos el procés consisteix a seleccionar d'entre els nombres

$$2^R\,, \quad 2^{R+4\cdot 5^n}\,, \quad 2^{R+8\cdot 5^n}\,,$$
$$2^{R+12\cdot 5^n}\,, \quad 2^{R+16\cdot 5^n}$$

aquell que tingui la $(n+1)$-èsima xifra 1 o 2, segons si la $(n+1)$-èsima xifra de 2^R és o no senar, cosa que equival que B sigui senar o no.

A68. (D'una olimpíada brasilera.) Trobeu totes les solucions enteres i positives de l'equació

$$(m+1)^n - 1 = m!\,.$$

Solució: (Solució de Joaquim Nadal Vidal, IES de Cassà de la Selva.) Per a $n = 1$ tenim:

$$(m+1)^1 - 1 = m! \;\Rightarrow\; m = m!$$

que dóna $m = 1$ o $m = 2$.

Per a $n = 2$ resulta

$$\begin{aligned} &(m+1)^2 - 1 = m! \;\Rightarrow\; m^2 + 2m = m! \;\Rightarrow \\ &m(m+2) = m! \;\Rightarrow\; m+2 = (m-1)! \end{aligned}$$

i $m = 4$.

Per a $n > 2$ tenim:

$$\begin{aligned} &(m+1)^n - 1 = m! \;\Rightarrow \\ &\quad m^n + \binom{n}{1} m^{n-1} + \binom{n}{2} m^{n-2} \\ &\qquad + \cdots + \binom{n}{n-1} m = m! \;\Rightarrow \\ &\Rightarrow\; m^{n-1} + \binom{n}{1} m^{n-2} + \binom{n}{2} m^{n-3} \\ &\qquad + \cdots + \binom{n}{n-1} = (m-1)! \end{aligned}$$

Com que $(m-1)!$ és múltiple de $m-1$, el nombre 1 és una arrel del polinomi

$$m^{n-1} + \binom{n}{1} m^{n-2} + \binom{n}{2} m^{n-3} + \cdots + \binom{n}{n-1}$$

cosa impossible, perquè, en tenir tots els coeficiens positius, és segur que no s'anula per a $m = 1$.

En conseqüència, les úniques solucions són $m = 1$ i $n = 1$, $m = 2$ i $n = 1$ i, finalment, $m = 4$ i $n = 2$.

A71. (Proposat per la redacció.) Demostreu que els nombres reals i positius a, b i c són els costats d'un triangle no degenerat si, i només si, qualsevol parella de nombres reals (p, q), amb $p + q = 1$, fa

$$a^2p + b^2q > c^2pq$$

Solució: (Solució de la redacció.) Les condicions

$$\begin{cases} p + q & = 1 \\ a^2p + b^2q & > c^2pq \end{cases}$$

equivalen que, per a tot nombre real,

$$a^2p + b^2(1 - p) > c^2p(1 - p)$$

o sigui

$$c^2p^2 + \left(a^2 - b^2 - c^2\right) p + b^2 > 0$$

que es compleix si, i només si, el discriminant de l'expressió quadràtica de la dreta és negatiu, és a dir, si

$$\left(a^2 - b^2 - c^2\right)^2 - 4b^2c^2 < 0$$

que es pot escriure

$$\left|a^2 - b^2 - c^2\right| < 2bc$$

o sigui,

$$-2bc < a^2 - b^2 - c^2 < 2bc.$$

Obtenim

$$(b - c)^2 < a^2 \quad \text{i} \quad a^2 < (b + c)^2$$

i, finalment,

$$|b - c| < a < b + c$$

cosa que mostra que a, b i c són els costats d'un triangle no degenerat.

A72. (Proposat per la redacció.) Quantes parelles de nombres reals (p, q) hi ha de manera que els punts de $\mathbb{R}^2$, (p, q), (p^2, q^2) i (p^3, q^3) siguin els vèrtexs d'un triangle equilàter?

Solució: (Solució de Joaquim Nadal Vidal, IES de Cassà de la Selva.) La igualtat dels costats porta al sistema d'equacions

$$\left.\begin{aligned} &\left(p^2 - p\right)^2 + \left(q^2 - q\right)^2 \\ &\qquad = \left(p^3 - p\right)^2 + \left(q^3 - q\right)^2 \\ &\left(p^2 - p\right)^2 + \left(q^2 - q\right)^2 \\ &\qquad = \left(p^3 - p^2\right)^2 + \left(q^3 - q^2\right)^2 \end{aligned}\right\}$$

el qual, després d'operar i descompondre en factors, queda

$$\left.\begin{aligned} -p^3(p-1)^2(p+2) &= q^3(q-1)^2(q+2) \ (*) \\ -p^2(p-1)^3(p+1) &= q^2(q-1)^3(q+1) \ (**) \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Si $p = 0$, les solucions de l'equació $(*)$ són $q = 0, 1, -2$ i les de l'equació $(**)$ són $q = 0, 1, -1$. Així, doncs, $(0, 0)$ i $(0, 1)$ són solucions trivials del sistema que donen sengles triangles *degenerats*, en els quals els tres vèrtexs són el mateix punt.

Si $p = 1$, les solucions de $(*)$ són, igualment, $q = 0, 1, -2$ i les de l'equació $(**)$ són $q = 0, 1, -1$ i, una altra vegada, les solucions del sistema $(1, 0)$ i $(1, 1)$ donen $(p, q) = \left(p^2, q^2\right) = \left(p^3, q^3\right)$, i els triangles que s'obtenen també són degenerats.

Si $p = -2$, les solucions de $(*)$, són $q = 0, 1, -2$, però cap de les parelles $(-2, 0)$, $(-2, 1)$ i $(-2, -2)$ és solució de l'equació $(**)$ i, per tant, no n'obtenim cap triangle equilàter. De la mateixa manera, si $p = -1$, les solucions de $(**)$ són $q = 0, 1, -1$ i tampoc cap de les parelles $(-1, 0)$, $(-1, 1)$ i $(-1, -1)$ és solució de $(*)$.

Descartades solucions que facin zero els factors de les equacions del sistema (1), podem dividir-les per obtenir

$$\frac{p(p + 2)}{(p - 1)(p + 1)} = \frac{q(q + 2)}{(q - 1)(q + 1)}. \qquad (2)$$

Apareix ara la possibilitat $p = q$, la qual però, en traslladar-la al sistema (1) es veu que només són possibles els casos ja examinats de les parelles $(0, 0)$ i $(1, 1)$. Podem, doncs, imposar la condició que $p \neq q$. Aleshores, després d'operar a l'equació (2) i simplificar, obtenim

$$p = -\frac{q + 2}{2q + 1}$$

expressió que es pot fer servir per substituir p a qualsevol de les dues equacions de (1). Si ho fem a l'equació ($*$), després de càlculs i simplificacions en què fem servir que $q \neq 0$ i que $q \neq -2$, obtenim

$$27(q+2)^2(q+1)^2 = q^2(q-1)^2(2q+1)^6$$

i, en treure l'arrel quadrada,

$$3\sqrt{3}(q+2)(q+1) = \pm q(q-1)(2q+1)^3 \quad (3)$$

Això són dues equacions polinòmiques de 5è grau, les quals, per tenir el grau senar, tenen cadascuna d'elles, almenys, una solució real, que trobarem per qualsevol dels mètodes coneguts. Així, si agafem la possibilitat "+", l'equació (3) és

$$\begin{aligned} 8q^5 + 4q^4 - 6q^3 - \left(5 + 3\sqrt{3}\right) q^2 \\ - \left(1 + 9\sqrt{3}\right) q - 6\sqrt{3} = 0 \end{aligned}$$

amb solució aproximada $q = 1{,}484593195$, per la qual $p = -0{,}877911202$. Obtenim el triangle de vèrtexs

$$\begin{aligned} &(-0{,}877911202, 1{,}484593195)\\ &(0{,}7707280788, 2{,}204016955)\\ &(-0{,}6766308141, 3{,}272068573) \end{aligned}$$

i costat igual a $1{,}798772366$.

I, si agafem la possibilitat "$-$" a l'equació (3), aleshores en resulta

$$\begin{aligned} 8q^5 + 4q^4 - 6q^3 + \left(3\sqrt{3} - 5\right) q^2 \\ + \left(9\sqrt{3} - 1\right) q + 6\sqrt{3} = 0 \end{aligned}$$

amb solució aproximada $q = -0{,}877911202$, que dóna $p = 1{,}484593195$. Aquest resultat ja era d'esperar, ja que només és un intercanvi de coordenades: la x passa a ser la y i al revés.

Mitjans mecànics de càlcul mostren que cap de les dues equacions té més arrels reals i, per tant, només hi ha dues parelles de nombres reals que, exclosa la possibilitat de triangles degenerats, compleixin el que es demana i són:

$$(p, q) = (-0{,}877911202, 1{,}484593195)$$

i

$$(p, q) = (1{,}484593195, -0{,}877911202)\,.$$

A73. (Proposat per la redacció.) Demostreu que, si a, b i c són els costats d'un triangle no degenerat, aleshores

$$\begin{aligned} a^2(b+c-a) + b^2(a+c-b) \\ +c^2(a+b-c) \leq 3abc\,. \end{aligned}$$

Solució: (Solució de Xavi Ros Otón, estudiant, FME (UPC), Barcelona, i Hugo Fernández Hervás, estudiant, FCM (UCM), Madrid.) A continuació demostrarem que la desigualtat es compleix no només si a, b i c són els costats d'un triangle, sinó que també es compleix si a, b i c són tres nombres reals i positius qualssevol.

La desigualtat es pot escriure com:

$$a^3+b^3+c^3+3abc \geq a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)$$

i si tenim en compte que

$$\begin{aligned} (b+c-a)(c+a-b)(a+b-c) = a^2(b+c) \\ + b^2(c+a) + c^2(a+b) - a^3 - b^3 - c^3 - 2abc \end{aligned}$$

observem que és equivalent a

$$abc \geq (b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)\,. \quad (1)$$

Sense perdre generalitat, podem suposar $a \geq b \geq c \geq 0$ i, aleshores,

$$c + a - b \geq 0 \qquad \text{i} \qquad a + b - c \geq 0\,.$$

Si a, b, c no són els costats d'un triangle, és obligatori que $a \geq b + c$, o sigui, $b + c - a \leq 0$ i, per tant,

$$abc \geq 0 \geq (b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)\,.$$

D'altra banda, si a, b, c són els costats d'un triangle, aleshores, si p és el semiperímetre del triangle, podem fer el canvi

$$\begin{cases} x &= p - a = \dfrac{a+b+c}{2} - a = \dfrac{b+c-a}{2} \\ y &= p - b = \dfrac{a+b+c}{2} - b = \dfrac{c+a-b}{2} \\ z &= p - c = \dfrac{a+b+c}{2} - c = \dfrac{a+b-c}{2} \end{cases}$$

que fa

$$\begin{cases} x + y = 2p - a - b = c \\ y + z = 2p - b - c = a \\ z + x = 2p - c - a = b \end{cases}$$

i la desigualtat a demostrar és ara

$$(x+y)(y+z)(z+x) \geq 8xyz\,.$$

Però aquesta desigualtat és una conseqüència immediata de la desigualtat aritmètica-geomètrica, ja que

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$$
$$\frac{y+z}{2} \geq \sqrt{yz}$$
$$\frac{z+x}{2} \geq \sqrt{zx}\,.$$

Nota: De fet, si a, b, c són els costats d'un triangle, la desigualtat (1) és conseqüència de la *desigualtat d'***Euler** $R \geq 2r$.

A74. (Proposat per la redacció.) Demostreu que un triangle $\triangle ABC$ és rectangle si, i només si,

$$\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} - \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} = \frac{1}{2}\,.$$

Solució: (Solució de Xavi Ros Otón, estudiant, FME (UPC).) Com que $A+B+C=\pi$, tenim

$$\begin{aligned} \mathrm{i} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{A}{2}+\frac{B}{2}+\frac{C}{2}\right)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{A}{2}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{B}{2}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{C}{2}} = \\ = \left(\cos\frac{A}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{A}{2}\right)\left(\cos\frac{B}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{B}{2}\right) \\ \left(\cos\frac{C}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{C}{2}\right) \end{aligned}$$

i, quan igualem les parts reals i les parts imaginàries, obtenim

$$\begin{aligned} \cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} &= \cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \\ &+ \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} + \sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned} \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} &= \cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \\ &+ \cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} + \sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} - 1 \end{aligned}$$

Ara calculem

$$\begin{aligned} &\left(\cos\frac{A}{2} - \sin\frac{A}{2}\right)\left(\cos\frac{B}{2} - \sin\frac{B}{2}\right) \\ &\left(\cos\frac{C}{2} - \sin\frac{C}{2}\right) = \cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} \\ &\quad - \cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} - \cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} \\ &\quad + \cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} - \sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} \\ &\quad + \sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} + \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} \\ &\quad - \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} = \\ &= 2\left(\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} - \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right) \\ &\quad - 1 \end{aligned}$$

i aquesta expressió és zero si, i només si,

$$\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} - \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} = \frac{1}{2}$$

i per tant si, i només si, un dels tres angles del triangle és recte.

A75. (Proposat per V. Diekert.) En una presó hi ha cent presos condemnats a mort, numerats de l'1 al 100. El director de la presó els ofereix una última possibilitat de salvar-se, que consisteix en això: fa cent paperets amb cadascun dels números de l'1 al 100, i els col·loca aleatòriament dins dels cent calaixos (també numerats de l'1 al 100), un paperet a cada calaix, d'una calaixera que té al seu despatx. Mentrestant els presos són a les seves cel·les, totalment incomunicats del món exterior i entre ells. La prova consisteix en el fet que, per a cada $i = 1, \ldots, 100$, seguirà els cinc passos següents:

1) Cridarà el pres i al seu despatx, tot sol;
2) li deixarà obrir els cinquanta calaixos que ell vulgui;
3) comprovarà si un dels calaixos oberts conté el paperet amb el número i;
4) els tornarà a tancar tots; i
5) tornarà el pres a la seva cel·la sense deixar-lo parlar amb ningú.

La condició que posa és que, si tots els presos obren el calaix amb el seu propi número, aleshores, tots se salven, però, només que un pres falli, tots moren.

Un dels presos, que és matemàtic, de seguida s'adona que el director de la presó els està prenent el pèl. Obrint cinquanta dels cent calaixos a l'atzar, cada pres té probabilitat $1/2$ d'encertar el seu propi número i, per tant, les probabilitats que tot el col·lectiu se salvi són $1/2^{100}$, que és com dir que ja estan morts abans de començar la prova. Després de pensar una mica, fa una sol·licitud al director: «Podria parlar uns minuts amb la resta de presos abans de començar el procés?». El director (conscient que, de tota manera, $1/2^{100}$ és insignificantment petit), accepta i li concedeix uns minuts.

Sabrieu dir en quina estratègia està pensant el pres matemàtic, que aconsegueix augmentar fins a més del 30 % (sí, heu llegit bé, a més de $0,3$!!) la probabilitat que tot el col·lectiu se salvi?

Solució: (Solució de Jordi Delgado Rodríguez.) Sigui $N = 50$ i considerem la permutació que a cada índex $i \in \{1, \ldots, 2N\}$ fa correspondre el nombre amagat al calaix i-èsim. En el que segueix ens referirem a aquesta permutació com a permutació o disposició inicial.

Si ara fem que cada pres comenci obrint el calaix amb índex igual al seu (és a dir, que el pres i-èsim comenci obrint el calaix i-èsim, $i = 1, \ldots, 2N$) i aleshores continuï la cerca obrint successivament el calaix indexat pel nombre amagat al calaix anterior fins a tenir N calaixos oberts, el que cada pres estarà fent és recórrer un cicle de la permutació inicial, que serà completat si troba el propi índex i quedarà sense completar si no el troba.

Així, cada pres complirà la seva part si, i només si, el cicle al qual pertany el seu índex consta de N o menys elements. Com que cada pres comença per un calaix diferent, tots els cicles hi estan involucrats, i, per tant, s'aconseguirà el repte col·lectiu si, i només si, cada cicle de la permutació inicial consta de, com a màxim, N elements o, el que és equivalent (però més ràpid de calcular), la permutació inicial no té cicles de longitud estrictament superior a N.

Així, tot seguint l'estratègia proposada, la probabilitat que tots els presos trobin el seu índex és la probabilitat que la permutació inicial no contingui cicles d'ordres entre $N + 1$ i $2N$. Ara bé, el nombre de permutacions de $2N$ elements amb un cicle de longitud $k > N$ és

$$\binom{2N}{k}(k-1)!(2N-k)! = \frac{(2N)!}{k}$$

Si suposem equiprobables les possibles disposicions inicials, obtenim que, per a tot k entre $N+1$ i $2N$, la permutació inicial conté un cicle de longitud k amb probabilitat $1/k$.

Com, a més, en ser els cicles considerats de llargada superior a N, no se'n poden donar dos a la mateixa permutació, es tracta d'esdeveniments disjunts i, per tant, la probabilitat que hi hagi algun cicle de longitud superior a N és

$$\sum_{k=N+1}^{2N} \frac{1}{k}$$

En definitiva, la probabilitat que la permutació inicial no contingui cicles d'ordres superiors a N, i per tant tots els presos trobin el seu índex, és

$$P_N = 1 - \sum_{k=N+1}^{2N} \frac{1}{k}$$

Quan $N = 50$ aquesta probabilitat és

$$P_{50} = 1 - \sum_{k=51}^{100} \frac{1}{k} = 0,31183$$

Observem que, en el cas general, és

$$P_N = 1 - \sum_{k=N+1}^{2N} \frac{1}{k} = 1 - (H_{2N} - H_N)$$

on H_n és l'n-èsim nombre harmònic:

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

Si tenim en compte que, per a n prou gran,

$$H_n = \ln(n) + \gamma + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

resulta que

$$P_N \approx 1 - (\ln(2N) - \ln(N)) = 1 - \ln(2) = 0,30685$$

per a N prou gran.

Carles Romero
IES Manuel Blancafort, la Garriga